Ejercicios de Análisis Matemático – Desigualdades

Desigualdades entre polinomios. Supongamos que $p(x)$ es una función polinómica de una variable, y queremos calcular para qué valores de la variable x se verifica que $p(x) > 0$.

Para ello lo que vamos a hacer es calcular las soluciones reales de la ecuación $p(x) = 0$, es decir, las *raíces* reales del polinomio $p(x)$. Esto solamente puede hacerse en casos sencillos. El más frecuente es cuando $p(x)$ es un polinomio con coeficientes que son números enteros y el coeficiente del término de mayor grado es igual a 1, porque entonces las raíces *enteras* de $p(x)$ deben ser divisores del término independiente.

Ejemplo. Calcula para qué valores de x se verifica que $-6 - 19x + 28x^2 + 2x^3 - 6x^4 + x^5 > 0$.

Solución. Por lo antes dicho, las raíces *enteras* del polinomio

$$p(x) = -6 - 19x + 28x^2 + 2x^3 - 6x^4 + x^5$$

solamente pueden ser $-6, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 6$. Tenemos que:

$$p(-6) < 0,\ \ p(-3) = -480,\ \ p(-2) = 0,\ p(-1) = 32,\ \ p(1) = 0,\ \ p(2) = 20,\ \ p(3) = 0,\ \ p(6) > 0.$$

Por tanto, -2, 1 y 3 son las únicas raíces *enteras* de $p(x)$. Dividiendo por Rufini obtenemos que $p(x) = (x + 2)(x - 1)(x - 3)(x^2 - 4x - 1)$. Calculamos ahora las raíces del trinomio de segundo grado $x^2 - 4x - 1$, que resultan ser $\alpha = 2 - \sqrt{5}$ y $\beta = 2 + \sqrt{5}$.

Ordenamos ahora todas las raíces de menor a mayor. Teniendo en cuenta que $2 < \sqrt{5} < 3$, resulta que $-2 < \alpha < 1 < 3 < \beta$. Tenemos que:

$$p(x) = (x + 2)(x - \alpha)(x - 1)(x - 3)(x - \beta)$$

Deducimos que:

$$\begin{aligned}
x < -2 \quad &\Longrightarrow \quad p(x) < 0 \text{ porque es producto de cinco números negativos.}\\
-2 < x < \alpha \quad &\Longrightarrow \quad p(x) > 0 \text{ porque es producto de un número positivo y cuatro negativos.}\\
\alpha < x < 1 \quad &\Longrightarrow \quad p(x) < 0 \text{ porque es producto de dos números positivos y tres negativos.}\\
1 < x < 3 \quad &\Longrightarrow \quad p(x) > 0 \text{ porque es producto de tres números positivos y dos negativos.}\\
3 < x < \beta \quad &\Longrightarrow \quad p(x) < 0 \text{ porque es producto de cuatro números positivos y uno negativo.}\\
\beta < x \quad &\Longrightarrow \quad p(x) > 0 \text{ porque es producto de cinco números positivos.}
\end{aligned}$$

Del estudio anterior se deduce que:

$$\{x \in \mathbb{R} : p(x) > 0\} =]-2, 2 - \sqrt{5}[\cup]1, 3[\cup] - 2 + \sqrt{5}, +\infty[.$$

Si nos piden estudiar para qué valores de la variable x se verifica una desigualdad del tipo $p(x) < q(x)$, donde $p(x)$ y $q(x)$ son funciones polinómicas, basta observar que la desigualdades $p(x) < q(x)$ y $q(x) - p(x) > 0$ son equivalentes y que $q(x) - p(x)$ es una función polinómica por lo que podemos seguir el mismo procedimiento anterior.

Observación. ***Si*** $a > 0$, las desigualdades $ab \geqslant 0$ y $b \geqslant 0$ son equivalentes y también son equivalentes las desigualdades $ab > 0$ y $b > 0$. Podemos usar este hecho para simplificar el estudio del signo de una función polinómica.

Por ejemplo, sea la función polinómica $p(x) = (x+2)^3(x+1)^2 x(x-1)^5(x-4)^6(x^2+x+1)$. Se trata de calcular para qué valores de $x \in \mathbb{R}$ se verifica que $p(x) > 0$. Como $p(x)$ se anula en los puntos $-2, -1, 0, 1, 4$ *en lo que sigue consideraremos que* x *es distinto de todos ellos*, es decir, que $p(x) \neq 0$. Tenemos entonces que $(x+1)^2 > 0$, $(x-4)^6 > 0$ y x^2+x+1 es un trinomio con discriminante negativo y cuyo coeficiente del término x^2 es positivo, por lo que se verifica que $x^2+x+1 > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ (de hecho $x^2+x+1 = (x+1/2)^2+3/4 > 0$), deducimos que la desigualdad $p(x) > 0$ es equivalente a $(x+2)^3 x(x-1)^5 > 0$.

Fíjate que lo que hemos hecho ha sido *prescindir de las raíces de orden par* (la raíz -1 de orden 2 y la raíz 4 de orden 6). También podemos prescindir de los trinomios con discriminante negativo y coeficiente de x^2 positivo.

Podemos simplificar más teniendo en cuenta que $(x+2)^3 x(x-1)^5 = (x+2)^2(x+2)x(x-1)^4(x-1)$ y que $(x+2)^2 > 0$ y $(x-1)^4 > 0$. Por tanto la desigualdad $(x+2)^3 x(x-1)^5 > 0$ es equivalente a $(x+2)x(x-1) > 0$. Pongamos $q(x) = (x+2)x(x-1)$. Hemos obtenido que *para valores de* x *distintos de* $-2, -1, 0, 1, 4$ la desigualdad $p(x) > 0$ es equivalente a $q(x) > 0$. Pero esta última es muy fácil de estudiar. Así, sin olvidar que estamos considerando x distinto de $-2, -1, 0, 1, 4$, obtenemos:

$x < -2$	$\Longrightarrow$	$q(x) < 0$ (producto de tres números negativos)	$\Longrightarrow p(x) < 0.$
$-2 < x < 0, x \neq -1$	$\Longrightarrow$	$q(x) > 0$ (producto de un número positivo y dos negativos)	$\Longrightarrow p(x) > 0.$
$0 < x < 1$	$\Longrightarrow$	$q(x) < 0$ (producto de dos números positivos y uno negativos)	$\Longrightarrow p(x) < 0.$
$1 < x, x \neq 4$	$\Longrightarrow$	$q(x) > 0$ (producto de tres números positivos)	$\Longrightarrow p(x) > 0.$

Hemos obtenido que:

$$\{x \in \mathbb{R} : p(x) > 0\} =]-2, -1[\cup]-1, 0[\cup]1, 4[\cup]4, +\infty[.$$

Es fácil deducir de lo anterior el siguiente resultado.

> *Una función polinómica cambia de signo en las raíces reales de orden impar y no cambia de signo en las raíces de orden par.*

Naturalmente, si lo que se quiere es calcular para qué valores de $x \in \mathbb{R}$ se verifica que $p(x) \geqslant 0$ basta añadir al resultado anterior los puntos en los que se anula $p(x)$.

Desigualdades entre funciones racionales. Supongamos que $p(x)$ y $q(x)$ son funciones polinómicas de una variable, y queremos calcular para qué valores de la variable x se verifica que $\dfrac{p(x)}{q(x)} > 0$. Se supone que los polinomios $p(x)$ y $q(x)$ no tienen factores comunes.

En estos ejercicios basta observar que la desigualdad $\dfrac{p(x)}{q(x)} > 0$ es equivalente a la desigualdad $p(x)q(x) > 0$, la cual ya sabemos resolver porque $p(x)q(x)$ es una función polinómica.

Ejemplo. Calcula para qué valores de $x \in \mathbb{R}$ se verifica la siguiente desigualdad.

$$\frac{x^2 - 4x - 2}{x^3 + 1} > 0.$$

Solución. Sabemos que al multiplicar una desigualdad por un número positivo se obtiene otra desigualdad equivalente a la dada. Por tanto, si a y b son números reales con $b \neq 0$, tenemos que:

$$\frac{a}{b} > 0 \Longleftrightarrow \frac{a}{b}\, b^2 = ab > 0.$$

En consecuencia, como debe ser $x^3 + 1 \neq 0$, la desigualdad del enunciado es equivalente a:

$$h(x) = (x^2 - 4x - 2)(x^3 + 1) > 0.$$

Las raíces de h son las soluciones de las ecuaciones

$$x^2 - 4x - 2 = 0, \qquad x^3 + 1 = 0.$$

Las soluciones de la primera ecuación son:

$$\alpha = \frac{4 - \sqrt{24}}{2} = 2 - \sqrt{6}, \qquad \beta = \frac{4 + \sqrt{24}}{2} = 2 + \sqrt{6}.$$

La segunda ecuación tiene una solución evidente, $x = -1$. Dividiendo por Rufini resulta:

$$x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1)$$

El trinomio $x^2 - x + 1$ tiene discriminante negativo y coeficiente de x^2 positivo por lo que es siempre positivo, $x^2 - x + 1 > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Tenemos que:

$$h(x) = (x - \alpha)(x - \beta)(x + 1)(x^2 - x + 1) > 0 \Longleftrightarrow p(x) = (x + 1)(x - \alpha)(x - \beta) > 0.$$

Como $-1 < \alpha < \beta$, deducimos que:

$$\begin{aligned}
x < -1 \quad &\Longrightarrow \quad p(x) < 0 \text{ porque es producto de tres números negativos.}\\
-1 < x < \alpha \quad &\Longrightarrow \quad p(x) > 0 \text{ porque es producto de un número positivo y dos negativos.}\\
\alpha < x < \beta \quad &\Longrightarrow \quad p(x) < 0 \text{ porque es producto de dos números negativos y uno positivo.}\\
\beta < x \quad &\Longrightarrow \quad p(x) > 0 \text{ porque es producto de tres números positivos.}
\end{aligned}$$

Concluimos que la desigualdad del enunciado es cierta para valores de x en $]-1, \alpha[\cup]\beta, +\infty[$. ☺

Comentarios. Este tipo de ejercicios también pueden hacerse estudiando por separado los intervalos en donde el numerador o el denominador son siempre positivos o siempre negativos. Creo que con esa forma de proceder es más fácil cometer errores.

No olvides simplificar siempre que sea posible. Por ejemplo, si no simplificas la expresión $\alpha = \frac{4 - \sqrt{24}}{2}$ no podrás comparar fácilmente α con -1, y necesitas poderlo hacer para ordenar las raíces.

Igualdades o desigualdades en las que intervienen valores absolutos

En general, para resolver igualdades o desigualdades en las que intervienen valores absolutos se deben considerar todos los casos posibles para quitar los valores absolutos que aparecen. Además de esta regla general, las siguientes observaciones pueden ser útiles.

- Igualdades del tipo $|f(x)+g(x)| = |f(x)| + |g(x)|$. Como consecuencia de la desigualdad triangular, la igualdad $|f(x)+g(x)| = |f(x)| + |g(x)|$ es equivalente a la desigualdad $f(x)g(x) \geqslant 0$.
- Una igualdad del tipo $|f(x)| = |g(x)|$ es equivalente a la igualdad $(f(x))^2 = (g(x))^2$; y también es equivalente a que se verifique alguna de las igualdades $f(x) = g(x)$ o $f(x) = -g(x)$.
- Una igualdad del tipo $|f(x)| = g(x)$ es equivalente a que se verifique alguna de las igualdades $f(x) = g(x)$ o $f(x) = -g(x)$, y además que se verifique $g(x) \geqslant 0$.
- Una desigualdad del tipo $|f(x)| \leqslant |g(x)|$ es equivalente a la desigualdad $(f(x))^2 \leqslant (g(x))^2$.
- Una desigualdad del tipo $|f(x)| \leqslant |g(x)|$ también puede estudiarse calculando los valores de x para los que se da la igualdad $|f(x)| = |g(x)|$, es decir, los puntos en que se anula la función $h(x) = |f(x)| - |g(x)|$. Estos puntos determinan intervalos en los que la función $h(x)$ tiene signo constante[1].
- Una desigualdad del tipo $|f(x)| \leqslant g(x)$ es equivalente a que se verifiquen las dos desigualdades $-g(x) \leqslant f(x) \leqslant g(x)$, y además que se verifique $g(x) \geqslant 0$.
- Una desigualdad del tipo $|f(x)| \geqslant g(x)$ se verifica para los valores de x tales que $g(x) < 0$; y para aquellos valores de x para los que $g(x) \geqslant 0$ es equivalente a que se verifique alguna de las dos desigualdades $f(x) \leqslant -g(x)$, $f(x) \geqslant g(x)$.

Observación. Las reglas anteriores se aplican exactamente igual para igualdades o desigualdades en las que intervienen más de una variable.

Por ejemplo, una igualdad del tipo $|f(x,y)+h(z)| = |f(x,y)| + |h(z)|$ es equivalente a la desigualdad $f(x,y)h(z) \geqslant 0$. Es posible que esta última desigualdad no pueda simplificarse, en cuyo caso debemos dejarla indicada tal como está.

Ejemplo. Calcula para qué valores de x se verifica la igualdad $\left|x^2-6x+8\right| = x-2$.

Solución. La primera condición que debe cumplirse es que $x-2 \geqslant 0$, esto es, $x \geqslant 2$. Para $x < 2$ la igualdad del enunciado no puede darse nunca. Supuesto que $x \geqslant 2$, la igualdad del enunciado equivale a que se verifique alguna de las igualdades:

$$\text{a) } x^2-6x+8 = x-2, \qquad \text{b) } x^2-6x+8 = -x+2$$

La igualdad a) es $x^2-7x+10=0$, cuyas soluciones son 2 y 5. La igualdad b) es $x^2-5x+6=0$, cuyas soluciones son 2 y 3. Observa que todas las soluciones obtenidas son mayores o iguales que 2. Concluimos que la igualdad del enunciado es cierta para $x=2$, $x=3$ y $x=5$. ☺

Ejemplo. Calcula para qué valores de x se verifica la desigualdad $\left|\dfrac{x-2}{x^2-2x-1}\right| > \dfrac{1}{2}$.

[1] Suponemos que las funciones f y g son continuas, en cuyo caso, esto es consecuencia del teorema de Bolzano que estudiaremos pronto.

Solución. La desigualdad del enunciado equivale a que se verifique alguna de las desigualdades:

$$\text{a)}\ \frac{x-2}{x^2-2x-1} > \frac{1}{2}, \qquad \text{b)}\ \frac{x-2}{x^2-2x-1} < -\frac{1}{2}$$

La desigualdad a) es equivalente a:

$$\frac{x-2}{x^2-2x-1} - \frac{1}{2} = \frac{-x^2+4x-3}{2(x^2-2x-1)} > 0 \Longleftrightarrow (-x^2+4x-3)(x^2-2x-1) > 0$$

Calculando las raíces de los dos trinomios obtenemos que son, ordenadas de menor a mayor, $\left\{1-\sqrt{2}, 1, 1+\sqrt{2}, 3\right\}$. Son todas ellas *raíces impares* de orden 1 (raíces *simples*), por lo que el polinomio $p(x)=(-x^2+4x-3)(x^2-2x-1)$ *cambia de signo en todas ellas*. Fácilmente se ve que para $x<1-\sqrt{2}$ se tiene que $p(x)<0$. Deducimos que:

$$\begin{array}{l}
p(x)<0 \ \text{ para todo } \ x\in]-\infty, 1-\sqrt{2}[\\
p(x)>0 \ \text{ para todo } \ x\in]1-\sqrt{2}, 1[\\
p(x)<0 \ \text{ para todo } \ x\in]1, 1+\sqrt{2}[\\
p(x)>0 \ \text{ para todo } \ x\in]1+\sqrt{2}, 3[\\
p(x)<0 \ \text{ para todo } \ x\in]3, +\infty[
\end{array}$$

Concluimos que la desigualdad a) se verifica para $x\in]1-\sqrt{2}, 1[\cup]1+\sqrt{2}, 3[$.

Análogamente se obtiene que la desigualdad b) se verifica para $x\in]-\sqrt{5}, 1-\sqrt{2}[\cup]\sqrt{5}, 1+\sqrt{2}[$.

Finalmente, la desigualdad del enunciado se verifica para

$$x\in]-\sqrt{5}, 1-\sqrt{2}[\cup]1-\sqrt{2}, 1[\cup]\sqrt{5}, 1+\sqrt{2}[\cup]1+\sqrt{2}, 3[.$$

☺

Ejemplo. Calcula para qué valores de x se verifica la igualdad

$$|x^2+3x-9| = |x^2+x-6| + |2x-3|\,.$$

Solución. Poniendo $f(x)=x^2+x-6$ y $g(x)=2x-3$, la igualdad del enunciado se escribe como $|f(x)+g(x)|=|f(x)|+|g(x)|$, igualdad que equivale a $f(x)g(x)\geqslant 0$, es decir $(x^2+x-6)(2x-3)\geqslant 0$. Calculando las raíces del trinomio tenemos que

$$(x^2+x-6)(2x-3) = 2(x+3)(x-2)(x-3/2).$$

Por tanto, $f(x)g(x)$ es un polinomio cuyas raíces, $\{-3, 3/2, 2\}$, son simples y, por tanto, cambia de signo en todas ellas. Deducimos fácilmente que la desigualdad $f(x)g(x)\geqslant 0$ se verifica si $-3\leqslant x\leqslant 3/2$, o si $x\geqslant 2$. ☺

Ejemplo. Calcula para qué valores de x se verifica la desigualdad $|x^2-6x+5| > |x^2+2x-5|$.

Solución. Empezamos calculando los puntos en que se verifica que $|x^2-6x+5| = |x^2+2x-5|$. Puesto que dos números tienen igual valor absoluto si son iguales o son opuestos, esta igualdad equivale a que se verifique alguna de las dos igualdades $x^2-6x+5=x^2+2x-5$, $x^2-6x+5=-(x^2+2x-5)$. La primera solamente se verifica para $x=5/4$ y la segunda para $x=0$ y $x=2$. Deducimos que la función $h(x)=|x^2-6x+5|-|x^2+2x-5|$ tiene signo constante en los intervalos $]-\infty,0[$, $]0,5/4[$, $]5/4,2[$ y $]2,+\infty[$. Tenemos que:

$$\begin{aligned}
h(-1)=6 &\implies h(x)>0 \text{ para todo } x\in]-\infty,0[\\
h(1)=-2 &\implies h(x)<0 \text{ para todo } x\in]0,5/4[\\
h(3/2)=3/2 &\implies h(x)>0 \text{ para todo } x\in]5/4,2[\\
h(3)=-6 &\implies h(x)<0 \text{ para todo } x\in]2,+\infty[
\end{aligned}$$

Por tanto, la desigualdad del enunciado se verifica para $x<0$ o para $5/4<x<2$. ☺

Ejemplo. Calcula para qué valores de x se verifica la desigualdad $|-x+|x-1||<2$.

Solución. La desigualdad del enunciado es equivalente a las dos desigualdades $-2<-x+|x-1|<2$, que son equivalentes a $x-2<|x-1|<x+2$. La segunda de estas desigualdades solamente puede darse si $x>-2$. Supongamos que $-2<x\leqslant 1$. Entonces se tiene que $|x-1|=1-x$, por lo que las desigualdades anteriores son en este caso $x-2<1-x<x+2$, que equivalen a $-3<-2x<1$, es decir, $-1<2x<3$, o bien $-1/2<x<3/2$. No podemos olvidar que hemos usado que $x\leqslant 1$, por lo que la condición obtenida queda $-1/2<x\leqslant 1$. Para $x>1$ se tiene que $|x-1|=x-1$, por lo que las desigualdades anteriores son en este caso $x-2<x-1<x+2$, que se cumplen siempre. Concluimos que la desigualdad del enunciado es cierta para $x>-1/2$. ☺

Ejemplo. Calcula para qué valores de x se verifica la siguiente desigualdad.

$$|x+1|+|x^2-3x+2|<4.$$

Solución. Puesto que $x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$, tenemos que

$$|x+1|+|x^2-3x+2|=|x+1|+|(x-1)(x-2)|=|x+1|+|x-1||x-2|.$$

Para controlar los valores absolutos consideraremos por separado los casos $x<-1$, $-1<x<1$, $1<x<2$ y $x>2$.

- Para $x<-1$ tenemos $|x+1|+|x-1||x-2|=-x-1+(1-x)(2-x)=x^2-4x+1$. Por tanto, la desigualdad del enunciado es $x^2-4x+1<4$, es decir, $x^2-4x-3<0$. Es fácil comprobar que para $x<-1$ se verifica que $x^2-4x-3>0$. Por tanto, para $x<-1$ la desigualdad del enunciado es siempre falsa.

- Para $-1<x<1$ tenemos $|x+1|+|x-1||x-2|=x+1+(1-x)(2-x)=x^2-2x+3$. Por tanto, la desigualdad del enunciado es $x^2-2x+3<4$, es decir, $x^2-2x-1<0$. Las raíces de este trinomio son $1-\sqrt{2}$ y $1+\sqrt{2}$. Es inmediato comprobar que $x^2-2x-1<0$ equivale a que $1-\sqrt{2}<x<1+\sqrt{2}$. Como $-1<1-\sqrt{2}<1$, concluimos que la desigualdad del enunciado es válida para $1-\sqrt{2}<x<1$.

- Para $1 < x < 2$ tenemos $|x+1| + |x-1||x-2| = x+1+(x-1)(2-x) = -x^2+4x-1$. Por tanto, la desigualdad del enunciado es $-x^2+4x-1 < 4$, es decir, $x^2-4x+5 > 0$. Este trinomio no tiene raíces reales, por tanto se verifica que $x^2-4x+5 > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ (observa que $x^2-4x+5 = (x-2)^2+1 > 0$). Concluimos que la desigualdad del enunciado es válida para $1 < x < 2$.

- Para $x > 2$ tenemos $|x+1| + |x-1||x-2| = x+1+(x-1)(x-2) = x^2-2x+3$. Por tanto, la desigualdad del enunciado es $x^2-2x+3 < 4$, es decir, $x^2-2x-1 < 0$. Las raíces de este trinomio son $1-\sqrt{2}$ y $1+\sqrt{2}$. Es inmediato comprobar que $x^2-2x-1 < 0$ equivale a que $1-\sqrt{2} < x < 1+\sqrt{2}$. Como $2 < 1+\sqrt{2}$, concluimos que la desigualdad del enunciado es válida para $2 < x < 1+\sqrt{2}$.

Para $x=-1$ la desigualdad no se verifica. Para $x=1$ y $x=2$ la desigualdad se verifica. Concluimos que la desigualdad se verifica para $1-\sqrt{2} < x < 1+\sqrt{2}$. ☺